“The Calculation of Implied Variances from the

Black-Scholes Model: A Note”

by Monaster and Koehler

2023 碩士班選擇權課程講義

國立政治大學金融學系 江彌修

根據 Black-Scholes 選擇權評價公式, 選擇權價格是距到期日, 履約價格, 股價, 無風險利率, 股票報酬率變異數的函數。其中, 前四項參數可由市場上直接觀察得到, 然而股票報酬率的變異數只能用估計的方式求得。利用過去選擇權歷史價格資料及 Black-Scholes 選擇權評價公式去反推求解變異數, 稱為「隠含波動率」(Implied Variance) 之求算。

求算隱含波動率的意涵是理論模型的參數校準(parameter calibration)問題，進行的方式是讓選擇權理論模型之價格(theoretical price)等於其市場價格(market quoted price)，進而反推出市價擬合之下理論模型所隱含之參數。

除了我們課堂中討論過的二分法（Bisection）, 本文所採用的Newton-Raphson方法隸屬於定點迭代(Fixed Point Iteration)求根法則。當使用 Newton-Raphson方法時，若其根確定存在，則起始值(initial value)的設定會直接影響其收斂的效率及運算成本。一個良好的起始值設定因而非常重要。本文在收斂的效率的極大化下，推導出Black-Scholes 選擇權評價模型之下最初起始值 變異數的計算公式。

首先，假設選擇權歐式買權價格為股價之函數，其Black-Scholes評價公式如下 :

其中N(.)為standard normal densities且

同時，假設為選擇權價格之市場報價。在Monaster and Koehler文章中，他們使用符號w來代表。我們的即是他們文章中的w, 意即， 等同無異。

當參數能夠擬合(校準)選擇權Black-Scholes評價公式之理論價格於其市場報價，意即， 也就是 ，我們稱為Black-Scholes評價公式之隱含波動率。

求算隱含波動率的問題形成,因此可表達為下列非線性方程式的求根問題

因此，參數為Black-Scholes評價公式之隱含波動率若且唯若

意即，為非線性函數之根，

基於我們對選擇權價格行為的理解，其無套利價格必須介於下列理性上下限區間：

第(3)式若存在有根（隱含波動率） 滿足 （意即 也就是 ），其價格必須不違反第4式中選擇權價格行為的理性上下限。

在另一方面，在市場可觀察到的特定值 和 之下, 可視為 單一變數的函數，其極值於v趨近於零及無限大時，可驗證下列敘述為真：

由上可知，參數擬合之下的選擇權Black-Scholes公式理論價格必定介於和 之間。意即， 將選擇權理論價格為 單一變數之函數時，其函數所收斂至之上下限確實完全呼應選擇權無套利價格行為的上下限。此時 （也就是）函數如果在 的 區間為嚴格遞增，則其單調性(monotonicity)和連續性(continuity)將確保第(3)式存在唯一解 (unique solution)。

1. **求算隱含波動率的牛頓法迭代過程**

令 是 的良好估計值而且令 。因真實的根是 且 , 數值 表示估計值 與真實 之間的差距。

因 值很小, 我們可以用一切線近似 (tangent line approximation) 來推論

現在, 我們開始選定一個起始值 來估計

以同樣的方式, 我們可以得到下一個估計值

以此方法繼續不斷推估。如果 是目前的估計值, 則下一個估計值為

因此, 我們得到下列方程式(6)，應用Newton Raphson方法來求算選擇權Black-Scholes理論評價模型之隱含波動率 ：

其中。 是 的第 個估計值。 隱含。 當 為連續且 , 為 的一階微分且為連續， 則第 式牛頓法求算隱含波動率的問題形成定義良好(well-posed)。

**二、收斂性探討**

我們可以利用 收斂性定理來說明本篇文章之注釋 2

（1）收斂性定理及定點定理

令 是定義於 的二次可導函數, 且具連續性。若 使得 且 , 則存在一區間 , 使得對於任一 , 牛頓法產生的數列 收斂至 。

令

可觀察到牛頓法隸屬於定點迭代 (fixed point iteration)，可被表達為 的形式。其中。因為 , 即知 , 所以 是 的一個定點。因為 且 是連續函數, 存在 使每一 都有 。這說明 在區間 定義良好且連續，所以,

即有 。任意挑選正數 , 根據連續性, 必存在區間 使得 。對於任何 , 根據均值定理 (Mean Value Theorem) 存在 滿足

則

上式可寫成 , 因此 。

再利用定點定理(fixed point theorem)：

設 是定義於 的一次可導函數。若對於任一 且 , 則

(2) 牛頓法之二次收斂性質

牛頓法尚具有二次收斂性質, 此性質說明了若是使用牛頓法時, 所選擇的起始點 呴接近最適值 的話, 才有可能迭代至最適值, 否則迭代過程將會發散。至於如何才算”夠接近”呢? 以下將先對最適值 點上做泰勒展開式, 進而推導出能使迭代收斂的區間, 若起始點不落入此區間, 則迭代過程必將發散。

在開始推導過程之前, 首先令

接下來對 在 點上做泰勒展開式，可得下式：

其中, 為展開三次式以後, 因為值極小, 故忽略不計。將上式令 , 移項得

由牛頓法可知, 當 時, 。

將(8)式帶入(7)式, 兩邊取絕對值後, 即可得出牛頓法之二次收敛型態。

為求能更清楚看出二次收澰的情况, 我們令 , 則可得到 式:

以上為牛頓法二次收斂的通式, 我們可以很明顯看出, 若 ,即起始點落入此區間, 則此數列必然能夠收斂, 反之則發散。

(3) 二次收斂性在 Black-Scholes Model 應用

由(9)式中, 我們已經得出牛頓法二次收斂的通式, 接下來, 將此條件應用於 Black-Scholes Model, 則我們可以很輕易得出所選擇的起始點要落入的區間, 才有機會迭代出最適 。

在進行推導前, 我們首先發現在 Black-Scholes Model 中, 。

是故我們可以改寫收斂條件 , 並依此找出收敛區間：

**三、挑選 Newton-Raphson Method 之最佳起始點**

牛頓法之二次收斂條件如前所述, 接下來我們將透過一次收斂條件與 Black-Scholes Model 本身的性質, 找出在符合二次收斂條件情况下, 能使迭代過程最有效率之起始點 。

（1）牛頓法之一次收斂性

我們首先由一次收斂條件出發, 一次收敛條件為

在一次收斂條件中我們可以發現, 很直覺的, 若每次 都能比 更接近 ,則迭代過程必然朝 收斂。若要找出符合條件之起始點, 我們除了知道左式需小於 1 之外, 我們還必須使用牛頓法和均值定理公式。

已知牛頓法為

牛頓法移項後可得

將上式代入均值定理( (假設

已知上式為 條件假設下成立, 同樣我們可設 , 則可得

由於無法確認 之關係, 故將兩邊童取絕對值, 即可得文中註釋 3 之形式, 即一階條件左式之樣貌。

仔細觀察 式右式, 若要使 , 則 之值必然介於 0 與 2 之間。同時, 若 為 函數極大值, 則 之值必然介於 0 與 1 之間, 則必然可使一階收斂條件達成。

接下來我們將嘗試求得最佳起始點 , 並說明 所具有的哪些性質能夠確保我們找到最適點 。

（2）最佳起始點 及其相關性質討論

前文中, 我們已知最佳起始點 為使 函數達極大值之值, 接下來我們將對

做進一步探討。很直覺的, 我們首先找出一階和二階條件。已知

**a. 函數一階條件**

為求推導方便, 在求一階條件前, 我們先驗證 和

接下來便可很快求得 F.O.C.

由 可知這隱含 或 , 即可推出最佳起始點 。

最後可得最佳起始點

**b. 函數二階條件**

在求二階條件以確認 F.O.C.為極大值前, 同樣的為求推導方便, 我們先驗證以下式子。

故可輕易推導出 S.O.C.

將一階條件 帶人上式, 則可得

已知 皆大於零, 故可知 , S.O.C.證明

同時, 我們可以知道

由(10)式, 可知牛頓法二次收斂條件

可知所得之最佳起始點同樣符合二次收斂條件, 即說明只要 ,

最佳起始點 皆為一足夠靠近 , 且能使迭代過程朝 逐漸靠近之起始

點。即令如此, 若是迭代過程最後發散, 則牛頓法求 最終仍毫無意義,

是故我們仍須確認迭代過程是否收斂, 詳見接下來討論。

**四、迭代過程之收斂性之討論**

**(1) 函數所具備之性質**

在討論迭代過程之收斂性之前, 為求推導方便, 我們先驗證當 跟 時, 的性質, 結果顯示 時, 為單調遞減函數；

時, 為單調遞增函數。證明過程如下：

已知

又由一階條件可知

將一階條件代入 中, 可得

由 (12)式便可輕易得出 的性質: 時, 為單調遞減函數; 時, 為單調遞增函數。

截至目前, 我們掌握了 Black-Scholes Model 以下特性

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

這些特性可以幫助我們證明在 Black-Scholes Model 中, 以 為起始點, 必然可以用牛頓法迭代出任意最適值 , 因為迭代過程為一朝向 收列之數列。詳細過程見下一小節。

(2) 迭代過程之收斂性討論

由之前討論可知, 我們可將牛頓法之迭代過程表示為：

也就是說, 若數列 為一收斂於 之數列, 則可用牛頓法迭代出任一範圍内之 , 若此數列發散則否。證明數列 收敛, 即必須證明數列 為一單調且有界之數列。

**a. 單調性**

欲證明數列 具單調性, 可藉由 本身所具有之單調性。

當 時, 由 之單調性可知 且 , 可得

同理可知, 當 時, 由 之單調性可知 且 , 可得

故由 本身所具有之單調性, 可知數列 同樣具有單調性。

**b. 有界**

欲證明數列 以 為界, 可藉由 之性質和最佳起始點 必然朝 移動的特性。

當 時, 由 之性質可得 , 及由 之單調性知 。但是無法確認 扣除一正數 是否還大於 , 也就是說：

因為 , 我們可以確認移動過程中並未出現兩邊同乘負數而導致方向改變的情况。透過 (14)式, 由 的特性可知, 切點的斜率 , 在 時, 必然大於斜率 , 也就是兩者斜率關係為 , 故可確認(13)式之關係為

因此可以確認數列 以 為界。同理可推, 當 時, 可得出關係式:

因此同樣可以確認數列 以 為界。

可知 為一單調且以 為界之數列, 也就是說, 為一收敛於 之數列。至此, 我們便可以確認由最佳起始點 來進行迭代, 必然可以找到根 。

**五、結論**

本篇文章示範了如何使用牛頓法, 在 Black-Scholes Model 之中, 找出最適起始值 , 並且確保 必然迭代出想要的目標值 。亦即, 本篇文章告訴我們在以迭代方式來求根之前, 必須先觀察函數本身內蘊性質, 來確認以下事項:

(1) 確定值域及定義域的範圍

(2) 觀察該範圍内函數是否具單調性，以確保求根時有唯一解。

(3) 以牛頓法求根, 是否能由一次收斂條件 , 來找出適合的起始點 ?

(4) 起始點 能否符合二次收斂條件? 即 為範圍內任何數時, 起始點 都距離 在一合理區間範圍内。

(5) 最後, 確認迭代過程 是否為一收斂於 之數列。

透過以上程序, 則可確保以迭代方式來求根必然可以找出最適值。